تکلیف سری اول

ساختمان داده‌ها و الگوریتمها
دانشکده ریاضی. دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی. پاییز ۱۴۰۴

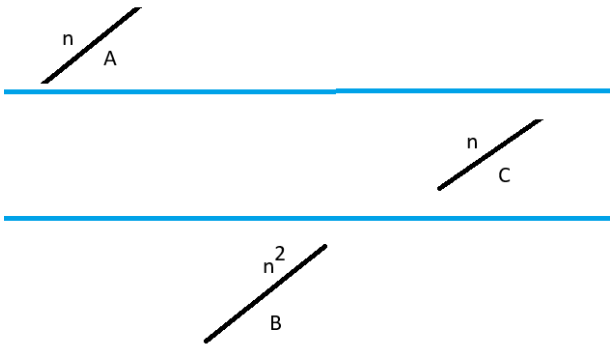
۱. پیچیدگی زمانی تابع $Alg1$ را بدست آورید.

```
def Alg1(n):
 count = 0
 for i in range(1,n*3):
   for j in range(1,i+1):
     count = count + 1
```

۲. یک تحلیل مجانبی برای خروجی تابع $Alg3$ ارائه کنید. فرض کنید $n = 3^k$ وقتی k یک عددی زوج است.

```
def Alg2(n):
   i = sqrt(n)
   j = 1
   while(i <= n):
     i = i * 3
     j = j * i
 return j
```

۳. شکل زیر توزیع یک دنباله را نشان می‌دهد. دنباله از قسمت A و B و C تشکیل شده که طول هر قسمت بالای آن نوشته شده. دقت کنید که هر سه دنباله افزایشی هستند اما عناصر A از همه عناصر B و C بزرگتر و C هم عناصرش از A بزرگتر هستند. با توجه به این توزیع، پیچیدگی زمانی الگوریتم های مرتب سازی حبابی، درجی و ادغامی را برای این دنباله از نظر مجانبی بیان کنید.



۴. توابع زیر را بر اساس تحلیل مجانبی مرتب کنید.

$f(n) = (\log n)^{\log\log n}$

$k(n) = (\log n)^{\log n}$

$h(n) = \binom{n}{4}$

$d(n) = \sqrt{n}d(\sqrt{n}) + n,\ d(n) = 1 \qquad n \leq 2$

$t(n) = t(n-1) + n^2,\ t(n) = 1 \qquad n \leq 1$

۵. با فرض اینکه $f(n)$ و $g(n)$ هر دو توابع صعودی و بزرگتر از 1 هستند و $f(n) \in O(g(n))$، مشخص کنید گزاره‌های زیر درست هستند یا نادرست. مثال نقض بیاورید یا اثبات کنید.

(آ) $\log f(n) \in O(\log g(n))$

(ب) $2^{f(n)} \in O(2^{g(n)})$

(ج) $f^2(n) \in O(g^2(n))$

۶. نشان دهید که با تغییر اندکی در الگوریتم مرتب سازی درجی که در کلاس ارائه شد می‌توان الگوریتمی بدست آورد که تعداد مقایسه‌هایی که در بدترین حالت انجام می‌دهد $\Theta(n \log n)$ است (توجه کنید پیچیدگی زمانی الگوریتم هنوز می‌تواند $\Theta(n^2)$ باشد!)

۷. در یک روش مرتب سازی با مقایسه، اولین عنصر لیست $a[0]$ به عنوان عنصر محوری انتخاب می‌شود. سپس عناصر لیست به دو قسمت L و R تقسیم می‌شوند. عناصر L آنهایی هستند که از $a[0]$ کوچکترند و R آنهایی هستند که از $a[0]$ بزرگترند (فرض کنید عناصر لیست متمایزند.) سپس هر کدام از دو لیست L و R بصورت بازگشتی با همین روش مرتب می‌شوند. تحلیل کنید که در بدترین حالت این الگوریتم چند مقایسه انجام می‌دهند (تحلیل مجانبی کافی است.) در بهترین حالت این الگوریتم چند مقایسه انجام می‌دهد؟

۸. با فرض اینکه $F(n)$ عدد n ام فیبوناچی است — اینجا $F(0) = 0$ و $F(1) = 1$ و $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ — با استفاده از استقرا و بدون استفاده از حل مستقیم سری فیبوناچی، نشان دهید که $F(n) \leq \phi^n$ وقتی که $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است.

۹. فرض کنید $F'(n) = F'(n-1) + F'(n-2) + 1$ وقتی که $F'(1) = 1$ و $F'(0) = 0$. آیا می‌توان گفت که $F(n) = \Theta(F'(n))$؟ اینجا $F(n)$ همان عدد n ام سری فیبوناچی است.

۱۰. یک تحلیل مجانبی برای $T(n)$ ارائه کنید.

$$T(n) = 2T(n/2) + n/\log n$$